Estratto dal *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*
Serie II, Anno III, N. 4 - Aprile-Maggio 1941-XIX
Edito dalla Casa Editrice NICOLA ZANICHELLI, Bologna

Ricerca grafica della retta dei flessi di una cubica piana nodata.

Nota di CARLO FELICE MANARA (a Milano).

Sunto. - *Si costruisce la retta dei flessi come polare del nodo rispetto ad una notevole conica invariante per il gruppo delle omografie che trasformano la cubica in sè.*

1. La ricerca della retta dei flessi di una cubica piana nodata rappresenta, dal punto di vista analitico, un problema molto semplice: detta, infatti, $f=0$ l'equazione della cubica ed $h=0$ quella della sua hessiana (che, come è noto, è ancora una cubica passante per i flessi allineati di f, avente un nodo nel nodo di f, con le stesse tangenti nodali) nel fascio $f+\lambda h=0$ esiste una sola cubica spezzata in un trilatero formato dalla retta dei flessi di f e dalla coppia delle tangenti nodali, comuni ad f e ad h. Tale unica cubica spezzata in un trilatero è quindi razionalmente determinabile e da questo trilatero, ancora razionalmente, è separabile la retta dei flessi di f.

Abbiamo esplicitamente rilevato che il procedimento analitico comporta tutte operazioni razionali, per cui, quando la cubica sia assegnata graficamente in un piano, la costruzione della sua retta dei flessi potrà farsi con la sola riga, a partire dagli elementi grafici che determinano la curva. Senonchè risulta impossibile seguire il procedimento analitico e tradurne graficamente le singole operazioni, per cui il problema grafico dovrà essere affrontato per altra via e ci condurrà a ricordare ed a rilevare proprietà della cubica piana che potranno interessare anche singolarmente prese, indipendentemente dall'applicazione che ne faremo al problema che ci interessa.

2. Consideriamo il gruppo G_6 delle sei omografie che trasformano in sè stessa una cubica piana C_3 che possegga un nodo N. Tale gruppo risulta costituito, oltre all'identità, dalle tre omologie armoniche che hanno centro in un flesso di C_3 e scambiano tra loro gli altri due e le tangenti nodali, e dalle due omografie cicliche del 3° ordine che permutano tra loro i flessi e lasciano invariate le tangenti nodali; quindi l'unico punto invariante per il gruppo G_6 è il nodo, e l'unica retta invariante la retta dei flessi.

Consideriamo ora la coppia $T_1 T_2$ dei punti di contatto delle tangenti mandate a C_3 da un suo punto P. Al variare di P su C_3 i punti $T_1 T_2$ descrivono una serie semplicemente infinita di coppie di punti, anzi, per la razionalità della curva, una g_2^1. Questa viene trasformata in sè stessa da tutte le omografie trasformanti la cubica in sè, ed i suoi punti uniti sono rappresentati dal nodo N considerato appartenente una volta all'uno ed una volta all'altro dei due rami della curva che vi passano, perchè quando il punto P si avvicina al nodo N percorrendo un ramo, i punti di contatto delle tangenti si avvicinano pure ad N percorrendo l'altro ramo ([1]).

Quindi se consideriamo l'inviluppo delle rette che uniscono le coppie di punti della nostra g_2^1 ad esso apparterranno anche le tangenti nodali u, v.

Ora la classe di questo inviluppo si calcola immediatamente osservando che un punto qualunque del piano determina, come centro di un fascio di rette, una g_3^1 su C_3, g_3^1 che ha in comune due coppie con la g_2^1 dei punti aventi lo stesso tangenziale. Infatti sull'ente di genere p una g_m^1 ed una g_n^1 hanno in comune $(m-1)(n-1)-p$ coppie ([2]).

Esistono quindi due coppie della g_2^1 dei punti aventi lo stesso tangenziale allineate con un punto qualunque del piano, ossia le rette che uniscono le coppie della suddetta g_2^1 inviluppano una conica k che, per quanto abbiamo detto, è trasformata in sè stessa dalle omografie del gruppo G_6 trasformante C_3 in sè.

([1]) È quindi facile concludere che tale g_2^1 è l'unica che sia trasformata in sè stessa dal gruppo G_6: infatti essa ha come punti doppi l'unica coppia che, sulla C_3, è invariante per il G_6.

([2]) Cfr. Enriques-Chisini. *Teoria geometrica delle equazioni algebriche.* Libro V, Cap. I, § 10.

Chiamiamo H, K i punti di contatto della conica k con le tangenti nodali u, v; è facile vedere che, essendo N unito per tutte le omografie del gruppo G_6, la conica k invariante e la coppia di tangenti nodali, appartenente all'inviluppo k, pure invariante per il gruppo G_6, la retta HK sarà unita per il gruppo G_6. Cioè sarà la retta dei flessi di C_3 perchè, come abbiamo osservato, essa è l'unica retta unita per il gruppo G_6.

3. È ora facile passare alle costruzioni grafiche che ci daranno la soluzione del problema che ci interessa. Per maggiore chiarezza abbiamo proceduto per gradi, rappresentando in quattro figure le varie costruzioni parziali che ci condurranno alla soluzione finale e in ciascuna figura assumendo come noti degli elementi ottenuti con costruzioni rappresentate nelle precedenti.

Ricordando che ogni cubica piana C_3 può ritenersi proiezione, fatta da un centro conveniente, di una cubica gobba, potremo va-

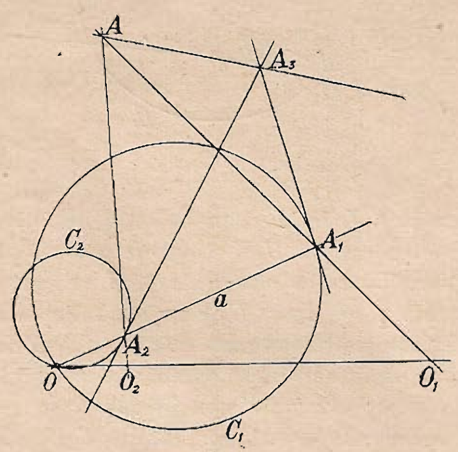

Fig. 1

lerci dei risultati noti della Geometria Descrittiva che si riferiscono alla rappresentazione della cubica gobba in proiezione centrale [3]. È noto che, assegnate nel piano due coniche $c_1 c_2$ (fig. 1) e due punti $O_1 O_2$ allineati con una delle intersezioni O di $c_1 c_2$, ogni retta a per O determina su $c_1 c_2$ rispettivamente due punti $A_1 A_2$ tali che l'intersezione A delle rette $O_1 A_1$ ed $O_2 A_2$ descrive una cubica razionale C_3 al variare della retta a nel fascio O. È pure noto che la tangente alla C_3 in A si ottiene congiungendo A stesso con l'intersezione A_3 delle tangenti a c_1 e c_2 in A_1 ed A_2.

[3] Cfr. per es. G. Fano, *Geometria Descrittiva*. Cap. IX, § 4.

Chiamiamo I_1 ed I_2 le involuzioni determinate su c_1 e c_2 dai fasci O_1 ed O_2 e siano I_2' ed I_1' le involuzioni ottenute proiettando da O la I_2 su c_1 e la I_1 su c_2. Il nodo N della C_3 (fig. 2) è l'intersezione della retta del fascio O_1 che determina su c_1 l'unica

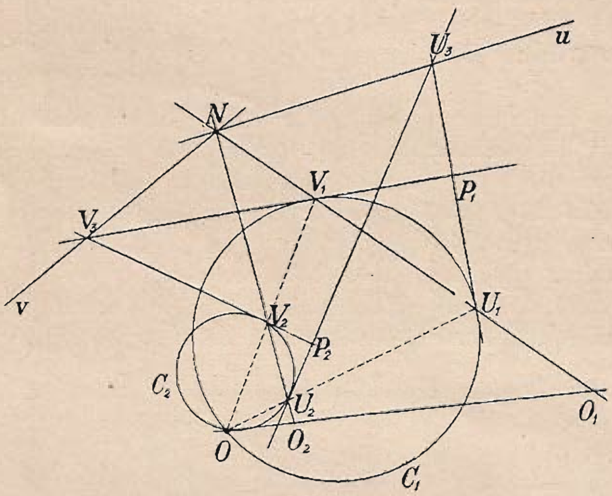

Fig. 2

coppia U_1V_1 comune a I_1 ed I_2' con la retta del fascio O_2 che determina su c_2 l'unica coppia U_2V_2 comune alla I_2 ed I_1'. La tangente nodale u sarà la retta che unisce N col punto U_3 intersezione delle tangenti a c_1c_2 in U_1U_2 e la v quella che unisce N col punto V_3 intersezione delle tangenti a c_1c_2 in V_1V_2.

Osserviamo che ognuna delle coniche corrisponde punto per punto alla C_3, in modo che ad N considerato appartenente al ramo di tangente u corrispondono su c_1c_2 i punti U_1U_2 rispettivamente, e considerato appartenente al ramo di tangente v corrispondono rispettivamente i punti V_1V_2. Chiamiamo P_1 il polo della retta U_1V_1 rispetto a c_1 e P_2 il polo della retta U_2V_2 rispetto a c_2; la $g_2{}^1$ dei punti di C_3 aventi lo stesso tangenziale sarà rappresentata su c_1 dalla involuzione di centro P_1 e su c_2 dalla analoga involuzione di centro P_2 che si ottiene proiettando la prima da O su c_2 stessa.

Una retta qualunque r_1 per P_1 (fig. 3) determina su c_1 una coppia S_1T_1 che sarà proiettata da O su c_2 in una coppia S_2T_2 allineata con P_2; le rette O_1S_1 ed O_2S_2 si intersecano in un punto S di C_3, le O_1T_1 ed O_2T_2 in un altro punto T di C_3 che ha lo stesso tangenziale di S; quindi la retta ST appartiene alla conica inviluppo k.

La costruzione, ripetuta tre volte, permetterebbe di ottenere sulle tangenti nodali u, v tre coppie di punti corrispondenti nella

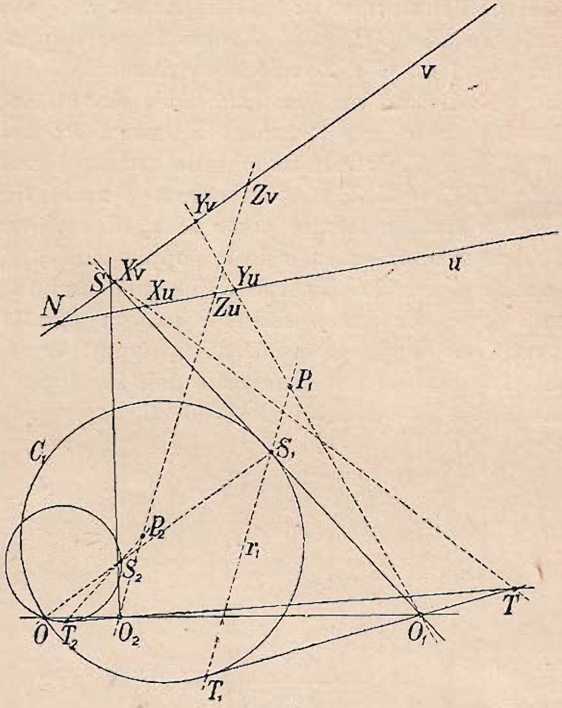

Fig. 3

proiettività di Steiner generante la k e permetterebbe di costruire i punti H, K omologhi di N su u. v in tale proiettività, o, che è

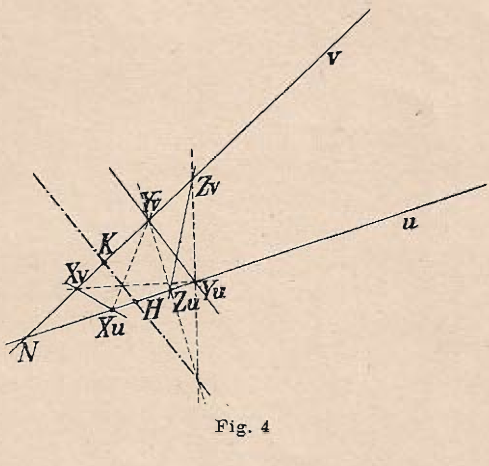

Fig. 4

lo stesso, l'asse di collineazione di essa. Senonchè una immediata osservazione ci convince che già nelle rette P_1O_1 e P_2O_2 abbiamo due elementi dell'inviluppo k: infatti per es. nel caso della P_1O_1 le rette analoghe alle O_1S_1 ed O_1T_1 coincidono con la P_1O_1 stessa e i punti analoghi ad S e T cadono su di essa.

Abbiamo quindi tutti gli elementi determinanti la proiettività di Steiner tra le u, v generante la conica k; nella fig. 3 le rette ST, P_1O_1 e P_2O_2 determinano sulle tangenti nodali u, v le coppie X_uX_v, Y_uY_v e Z_uZ_v rispettivamente; nella fig. 4 la retta dei flessi HK è stata costruita come asse di collineazione della proiettività determinata su u, v dalle coppie X_uX_v, Y_uY_v e Z_uZ_v.

Sarà appena necessario osservare che, nel caso in cui le tangenti nodali u, v non siano reali, è ancora possibile costruire quante si vogliano coppie di punti di C_3 aventi lo stesso tangenziale e quindi quante si vogliano rette dell'inviluppo k e in definitiva determinare la retta dei flessi di C_3 come polare di N rispetto a k.